BREVES CONSIDERAÇÕES SÔBRE OS ÊRROS EM AGRIMENSURA ÊRRO DE FECHAMENTO

Bento Ferraz de Arruda Pinto

Engenheiro Agrônomo

Nenhuma quantidade determinada pela observação pode ser medida exatamente. Entre o verdadeiro valor dessa quantidade e o seu valor obtido pela medida há sempre uma diferença a que se dá o nome de **êrro.**

Em agrimensura as quantidades medidas são os ângulos e as distâncias. Nela se consideram, pois, quer separadamente, quer em seu conjunto, êrros angulares e êrros lineares.

Quando se faz, por exemplo, o levantamento de um terreno pelo sistema de caminhamento fechado, seja para obter a sua área, seja para o conhecimento exato da sua linha perimetral, sempre aparece no final dos trabalhos topográficos uma certa diferença denominada **êrro de fechamento.** Esta diferença provém simultâneamente dos êrros angulares e dos êrros de alinhamento. Modernamente consideram-na como a resultante da ação conjugada de **êrros vetores** — assim designando certos êrros independentes que influem na posição de um mesmo ponto embora atuando em diferentes direções.

A propagação dos êrros vetores não difere pràticamente da dos êrros escolares e o estudo de ambas, tendo por base as mesmas leis da teoria dos êrros, está afeto ao Cálculo das Probabilidades — do qual constitui uma das mais interessantes aplicações.

Classificam-se os êrros, em geral, em três categorias distintas, a saber :

a) Os **enganos**, mais ou menos grosseiros, motivados quase sempre pela imperícia, dessidia ou falta de cuidado do operador.

b) Os **êrros sistemáticos ou cumulativos** que alem de outras causas, podem provir das variações de temperatura ou do emprêgo de aparelhos viciados, imperfeitos ou mal ajustados.

c) Os **êrros acidentais**, inevitáveis, em tôda e qualquer medição, tendo origem nas pequenas imperfeições quer pessoais, quer instrumentais.

A êstes, exclusivamente, é que se aplicam as regras e ensinamentos da teoria dos êrros, de que nos serviremos abundantemente no decorrer dêste trabalho.

Os enganos e os êrros sistemáticos de maior vulto serão facilmente evitados ou eliminados desde que se conheçam as suas causas, — sempre suscetíveis de remoção. Todavia, os de pequena monta se confundem frequentemente com os êrros acidentais, tornando-se impossível a sua completa eliminação.

Os êrros acidentais permanecem ainda mesmo que os outros dois sejam inteiramente afastados e nunca serão conhecidos em sua verdadeira extensão, muito embora, por meio de reiteradas observações, tanto mais eficientes quanto em maior número, possamos fixar o seu **valor provável** dentro de limites mais ou menos restritos consoante a aplicação que tivermos em vista. Tal propriedade resulta da observação dos fatos que nos levaram a admitir como verdadeiros axiomas as seguintes proposições :

1 — Os êrros acidentais demasiadamente grandes nunca se dão;

2 — Os êrros pequenos são mais frequentes do que os grandes;

3 — Os êrros positivos e os negativos, ou sejam, acima e abaixo do valor verdadeiro, são igualmente frequentes.

* * *

Nos trabalhos topográficos os êrros angulares devem ser verificados ou mesmo corrigidos logo após o serviço de campo, tendo-se em vista que a soma dos ângulos internos de um polígono qualquer é igual a tantas vezes dois ângulos retos quantos são os lados do poligno, menos dois. Os que decorrem das medidas de distância só aparecem no final da execução da planta, acrescidos, naturalmente, das imperfeições do desenho, ou então, após o cálculo das coordenadas. Nesta última hipótese, se se efetuarem os cálculos antes da correção dos êrros angulares, o êrro de fechamento obtido pelo cálculo provém ao mesmo tempo das duas fontes citadas. Então, a sua distribuição criteriosa entre as latitudes e as longitudes calculadas virá corrigir indireta e simultâneamente os êrros angulares e os de alinhamento. Aliás, esta prática em nada prejudica a boa marcha do serviço, bastando que se faça anteriormente apenas a verificação dos êrros angulares.

Nesta altura ocorre-nos uma objeção: Qual será o êrro permissível ou o limite máximo de tolerância para o êrro de fechamento? Eis o que nos propomos a explanar nas considerações que se seguem, devendo, antes, prevenir o leitor que o êrro permissível não pode ser expresso de uma forma rígida e única para todos os casos, por isso que, sendo relativo, está na dependência de circunstâncias várias entre as quais avultam a finalidade do serviço, a precisão dos aparelhos empregados, a boa ou má conformação dos terrenos, a sua praticabilidade, etc.... Nem é por outro motivo que certos países adotam em seus regulamentos oficiais fórmulas diversas para a expressão do êrro permissível, variando estas segundo a configuração dos terrenos — classificados entre bons, médios e maus.

Para solucionar a questão proposta, a teoria dos êrros poderá vir grandemente em auxílio do profissional da agrimensura, proporcionando-lhe os meios de avaliar com certa aproximação, não o êrro verdadeiro cujo valor exato, já o dissemos, nunca será conhecido, mas o **êrro provável**, isto é, o êrro que poderia êle esperar dentro das condições técnicas do trabalho executado. Animado de tais propósitos, procurará o agrimensor, antes de tudo, determinar por si mesmo o grau de precisão dos seus aparelhos, ficando dest'arte habilitado a conhecer de antemão, em cada caso especial, **o seu próprio êrro provável em conexão com os instrumentos do seu próprio uso.**

Vejamos como conseguir êsse objetivo.

I. MEDIDAS ANGULARES. **Como determinar o êrro permissível ou o coeficiente de precisão das medidas angulares.** Os aparelhos destinados à medição dos ângulos já trazem, por construção, o teor de aproximação de suas leituras angulares, cabendo, apenas, ao operador, a sua escolha, conforme o fim que tiver em vista. É desnecessário acrescentar que na medição usual das propriedades rurais seria inútil o emprêgo de instrumentos de grande precisão — que os há com leitura aproximada até dois segundos de arco — porque tais aparelhos se destinam precìpuamente aos trabalhos de triangulação geodésica, fora do alcante do nosso objetivo. Para os fins colimados em agrimensura são mais que suficientes os pequenos transitos geralmente em uso entre nós, com leitura de ângulos até um minuto de arco, com os quais se conseguem os mais apreciáveis resultados. Com êstes aparelhos os ângulos podem ser lidos no vernier até **trinta segundos** de aproximação, — valor êsse que poderá ser adotado como o êrro permissível em cada leitura angular, caso não queira o operador determinar por si mesmo, mediante leituras reiteradas de um mesmo ângulo, melhor coeficiente de aproximação.

Em um caminhamento qualquer, admitindo-se que tôdas as leituras angulares tenham sido tomadas com igual cuidado e em condições idênticas, isto é, que tenham o mesmo pêso, torna-se evidente que o êrro admissível para um só ângulo será o mesmo para todos os outros, qualquer que seja a amplitude dêsses ângulos.

Existe uma lei grandemente utilizada em "teoria dos êrros" segundo a qual : **"O êrro provável da soma ou diferença de duas ou mais quantidades é igual à raiz quadrada da soma dos êrros prováveis de cada uma das quantidades consideradas".** Esta lei, atribuida a Laplace e denominada Lei da Propagação dos Êrros, é verdadeira para tôda e qualquer quantidade média, quer se trate de grandeza angular ou linear, escalar ou dirigida. Além da sua aplicação no sentido direto tal como reza o enunciado supra, pode ela ser empregada também em sentido reverso para se conseguir o êrro provável de uma só das parcelas quando se conhece o êrro da soma de duas ou mais quantidades iguais. Em consequência, se chamarmos **Ea** o êrro da soma dos ângulos internos e **a** o coeficiente **angular** do êrro permissível, teremos, para um triângulo :

$Ea = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a \sqrt{3}$; para um quadrilátero — $Ea = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{4}$ e assim por diante. Generalizando, para um polígono qualquer de **n** lados, vem

$$Ea = a \sqrt{n} \quad (1)$$

Esta fórmula é de grande importância e pode ser interpretada do seguinte modo : "O êrro provável da soma dos ângulos internos de um polígono qualquer é diretamente proporcional à raiz quadrada do número de lados dêsse polígono".

Exemplo — Admitindo-se para **a** o valor de 30" (coeficiente angular adaptável aos nossos trânsitos comuns) qual o êrro que poderemos esperar na soma dos ângulos internos de um poligono de 9 lados ?

Aplicando a fórmula (1) temos $Ea = 30'' \sqrt{9} = \pm 90'' = \pm \frac{3'}{2}$

O resultado assim obtido, posto em confronto com o êrro **actual** encontrado na verificação do serviço de campo, servirá de guia para que o mesmo seja aceito ou rejeitado.

Convém lembrar, entretanto, que as leis da teoria dos êrros só se aplicam aos êrros acidentais, de sorte que qualquer grande diferença verificada no confronto dos valores acima, dando motivo à rejeição do serviço, será levada à conta dos enganos ou dos êrros cumulativos cujas causas devem ser procuradas e eliminadas.

Muitas vezes há grande conveniência em exprimir-se o êrro angular em têrmos da unidade linear, isto é, em radianos. Sabendo-se que o desvio angular de um minuto, por unidade de distância, corresponde aproximadamente a **0.000291 — bastará** multiplicar êsse valor numérico pelo êrro angular em minutos ou fração de minuto, para obter-se o valor correspondente em radianos. Assim, se quizermos expressar em radianos o êrro da soma dos ângulos internos de um polígono de **n** lados, teremos de modificar a fórmula (1) como adiante se vê :

$$Ea = 0{,}000291 \times a \sqrt{n} \qquad (2)$$

ou melhor

$$Ea = 10^{-4} \times 2{,}91 \times a \sqrt{n} \qquad (3)$$

Esta última fórmula facilita grandemente os cálculos e é aconselhável quando se possui uma tabela de ângulos com o seu equivalente em radianos.

II. Medidas de alinhamentos. Meios de determinação do coeficiente de precisão de uma corrente ou fita métrica.

Quando se tratar da sua aplicação a um trabalho de grande importância que justifique por sua própria natureza o emprêgo do método dos "mínimos quadrados" e supondo que para tal fim foram eliminadas tôdas as causas de êrros sistemáticos, eis como se poderá conseguir o **coeficiente de precisão** de uma cadeia ou fita métrica : Escolhe-se um local que reuna as condições médias do terreno a medir e toma-se aí uma distância um certo número de vezes — nunca menos de três — sempre com os mesmos auxiliares e com a mesma corrente ou fita métrica cujo coeficiente de precisão se quer determinar. Organiza-se um quadro com o rol dos resultados e tira-se a média aritmética das diversas medidas anotadas. Isto feito, procuram-se as diferenças entre a média encontrada e cada uma das **n** medidas ou observações. Tais diferenças que se denominam **resíduos** ou **discrepâncias**, são elevadas ao quadro e em seguida somadas para obter-se o valor de $\sum d^2$ com o qual se entra na fórmula abaixo, preconizada pela teoria dos mínimos quadrados para se conseguir o valor **E** do êrro provável de uma única medida ou observação. Eis a fórmula, cuja dedução, aliás, não cabe no âmbito dêste trabalho : —

$$E = 0{,}6745 \sqrt{\frac{\Sigma\, d^2}{n-1}} \quad (*) \qquad (4)$$

Conhecido assim o êrro provável **E** da base medida cuja distância **l** pode ser considerada como a **soma** de **N** correntes **iguais**, de **c** metros de comprimento, a lei da propagação dos êrros, já nossa conhecida e agora aplicada em sentido reverso, nos **fornecerá** os meios de determinar o êrro provável **k** de cada corrente, ou seja, o seu **coeficiente de precisão.**

Assim, lembrando que **N** é **igual** a **l** $\div$ **c**, teremos

$$E = \sqrt{k^2 N} = k\sqrt{N} \qquad (5)$$

donde

$$k = \frac{E}{\sqrt{N}} \qquad (6)$$

Apliicação. No quadro abaixo, que **dispensa** maiores **explicações**, vê-se na segunda coluna o **resultado** de cinco medidas tomadas com um duplo **decâmetro** em uma base de **200 metros**. A média aritmética das cinco medidas observadas é **200,12** ms. Na terceira coluna, encabeçada pela letra **d**, as **discrepâncias**. Finalmente, na última coluna, em frente a cada **resíduo** ou discrepância, o respectivo quadrado. **Logo** abaixo, o valor de Σ d2 (soma dos quadrados das discrepâncias). Com o emprêgo da fórmula (4) achou-se para **E** o valor de **0,035** que substituido em (6) nos deu o valor de **k** = **0,011**.

(*) **n** representa o número das observações

Vejamos o quadro.

	Medidas	d	d^2
1	200,00	— 0,012	0,000144
2	199,95	— 0,062	0,003844
3	200,50	+ 0,038	0,001444
4	200,08	+ 0,068	0,004624
5	199,98	— 0,032	0,001024
n=5	1000,06		$\Sigma d^2 = 0,011080$

$$\text{Méd. arit.} = 1000,06 \div 5 = \mathbf{200,012}$$

$$N = 200 \div 20 = 10$$

$$E = 0,6745 \sqrt{\frac{0,011080}{4}} = 0,035$$

$$k = \frac{0,035}{\sqrt{10}} = 0,011$$

Coeficiente de precisão = 0,011

Os dados arbitrários colhidos para o cálculo acima, apenas para servirem de guia, forneceram ao duplo decâmetro do nosso exemplo um excelente coeficiente de precisão que poderia ser adotado em quaisquer trabalhos de grande responsabilidade. Contudo, na medição das propriedades rurais as nossas pretensões devem ser mais modestas. Para determinar o coeficiente de precisão damos, a seguir, um processo mais simples e bastante prático que poderá ser usado com ótimos resultados. Escolhe-se, como anteriormente, uma distância determinada que será medida um certo número de vezes, quatro, por exemplo. Acham-se as discrepâncias entre a primeira medida e as três restantes; depois, as da segunda com as duas restantes e finalmente a da terceira com a última medida. Obtêm-se dêsse modo seis resíduos cuja média aritmética será o êrro provável **E** da base escolhida. Procura-se o valor de **N** como no exemplo anterior e aplica-se a fórmula (6) para se ter o valor **k**, — coeficiente de precisão procurado. Um exemplo completo vê-se no quadro abaixo.

Observações	Medidas	Discrepâncias		
1.º	200,00			
2.º	200,15	0,15		
3.º	200,05	0,05	0,10	
4.º	199,90	0,10	0,25	0,15

$$E = (0,15+0,05+0,10+10+0,25+0,15) \div 6$$

$$E = 0,1333 \qquad N = 200 \div 20 = 10$$

$$0,1333 = k \sqrt{10} \qquad \text{(Eq. 5)}$$

$$\therefore\ k = \frac{1,333}{\sqrt{10}} = 0,0422 \qquad \text{(Eq. 6)}$$

Coeficiente de precisão = 0,04.

Aplicação. Se medirmos uma só vez a distância de um quilómetro com o duplo decâmetro experimentado acima, de precisão = 0,04, qual será o êrro provável dessa medição ?

Solução. $N = 1000 \div 20 = 50$

$$E = 0,04 \sqrt{50} = \pm\ 0,28 \qquad \text{(Eq. 5)}$$

De posse dêsses dois elementos essenciais — **o êrro angular permissível** (com referência a cada instrumento)e o **coeficiente de precisão** da medida das distâncias (corrente ou fita métrica) — estamos em condições de estudar pormenorizadamente a propagação dos êrros vetores que conduzem ao êrro de fechamento, o que faremos, a seguir antes de darmos por concluida a nossa tarefa.

• • •

ANÁLISE DO ÊRRO DE FECHAMENTO

Define-se o êrro de fechamento como sendo a diferença entre a posição de uma estação qualquer do perímetro, assumida como ponto de partida, e a posição, obtida pelo cálculo, dessa mesma estação, ora considerada como ponto de chegada.

Interpretada à luz do cálculo das coordenadas, tal diferença representa a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são respetivamente os êrros encontrados em latitudes e em longitudes. O seu valor atual nos é dado pela fórmula $E = \sqrt{l^2 + d^2}$ na qual **E** representa o êrro de fechamento, **l** o êrro em latitudes e **d** o êrro em longitudes.

Encarada sob outro aspecto, pela teoria dos êrros, a diferença de fechamento pode ser considerada como a resultante da ação conjunta de êrros vetores (angulares e lineares). E o seu valor **provável,** na conformidade da conhecida lei da propagação dos êrros, vem a ser igual à raiz quadrada da soma dos quadrados dos êrros prováveis das medidas angulares e das medidas de alinhamento. Chamando Ef o êrro provável de fechamento, Ea a componente dos êrros angulares e Ec a dos êrros lineares, teremos, de acôrdo com o enunciado retro,

$$E_f = \sqrt{E_a{}^2 + E_c{}^2} \qquad (7)$$

Mas, se o êrro provável de fechamento resulta da ação combinada de duas componentes diversas e independentes entre si, como discernir no seu todo a parte que provém das medidas angulares daquela que dimana das medidas de alinhamento? É o que pretendemos esclarecer nas linhas que se seguem analisando separadamente cada uma das quantidades — Ea e Ec que aparecem debaixo do radical da equação (7).

Comecemos pelo elemento Ea das medidas angulares.

Devido ao êrro angular, o ponto extremo de um segmento retilíneo qualquer sofre um desvio, no sentido da sua rotação para a direita ou para a esquerda, proporcional à distância dêsse segmento. Se considerarmos, pois, um alinhamento AB, de comprimento l_1, o desvio provocado na posição **B** pelo êrro angular **a** (em radianos) será : $\pm\ al_1$; um segundo alinhamento **BC**, de comprimento l_2' ligado ao primeiro, sofrerá na sua extremidade **C** um deslocamento igual a $\pm\ al_2$ — visto que o coeficiente **a** do êrro angular é sempre o mesmo para todos os ângulos medidos com o mesmo instrumento, em igualdade de condições. Mas o êrro $\pm a\ l_2$ do primeiro alinhamento influirá por sua vez no alinhamento seguinte, de sorte que, de acôrdo com o estabelecido pela lei da propagação dos êrros, o deslocamento da extremidade **C** (esta considerada em relação à origem **A** do primeiro alinhamento) será :

$$Ec = \sqrt{a^2 l_1^2 + a^2 l_2^2} = \sqrt{a^2 (l_1^2 + l_2^2)} \qquad (8)$$

Êste processo repetir-se-á de modo idêntico em cada um dos alinhamentos subsequentes ligados entre si formando linha quebrada ou poligonal. Assim, se encararmos o ponto extremo de um contôrno poligonal de **n** lados, o seu desvio em relação ao vértice precedente será : $\pm$ **aln** ; mas em relação ao ponto de partida da linha poligonal será dado pela equação.

$$En = \sqrt{a^2 (l_1^2 + \ldots l_n^2)} \qquad (9)$$

Se a extremidade do último alinhamento coincidir com o ponto inicial do primeiro, como é o caso de um caminhamento fechado, a poligonal se transformará em linha perimetral de um polígono e o deslocamento **En**, provocado pelo êrro angular, confundir-se-á com a primeira componente **Ea** da fórmula (7) do êrro de fechamento.

Virá, então

$$Ea = En = \sqrt{a^2 (l_1^2 + l_2^2 + \ldots l_n^2)} \qquad (10)$$

Elevando o quadrado, vem

$$E_a^2 = {}_a^2 \left(l_1^2 + l_2^2 + \ldots l_n^2 \right) \qquad (11)$$

Nós já vimos (eq. 5) que o êrro linear de uma **distância** qualquer medida com a corrente, é proporcional **à raiz quadrada** do número **N** de correntes nela contidas. **Vimos também que** o valor de **N** corresponde à relação $\frac{l}{c}$, na qual **l representa** o comprimento total da linha medida e **c** o **da própria corrente**. Assim, se chamarmos **k** o coeficiente de **precisão da corrente**, o desvio da **extremidade B** de um **alinhamento AB, de** comprimento l_1. será : $\pm k \sqrt{l_1/c}$ Um segundo alinhamento **BC**, de comprimento l_2, terá na sua extremidade **C um deslocamento** igual a $\pm k \sqrt{l_2/c}$ Ligados, porém, entre si, **êsses** dois alinhamento, de sorte que o êrro do **primeiro vá influir na** posição do segundo, o afastamento do ponto C **será dado pela** equação

$$Ec = \sqrt{k^2 \frac{l_1}{c} + k^2 \frac{l_2}{c}} = \sqrt{k^2 \frac{(l_1 + l_2)}{c}} \qquad (12)$$

Fazendo igual raciocínio com respeito a cada um dos **alinhamentos** de uma linha quebrada de **n** lados, teremos o **deslocamento total En** do ponto extremo da **poligonal representado** pela equação

$$En = \sqrt{k^2 \frac{(l_1 + l_2 + \ldots ln)}{c}} \qquad (12)$$

Na hipótese de uma figura fechada, como no **caso precedente**, o valor **En** identificar-se-á com a **segunda componente** Ec do êrro de fechamento (7). **Mas, sendo a soma 11 + 12 . . . 1n** igual ao **perímetro do polígono**, o seu valor **será substituido por** **P** na fórmula que **segue**

$$Ec = En = \sqrt{k^2 \frac{P}{c}} \qquad (14)$$

que elevada ao quadro nos dá

$$E_c^2 = k^2 \frac{P}{c} \qquad (15)$$

Substituindo na equação (7) os valores encontrados em (11) e em (15), respectivamente, teremos a fórmula do êrro provável de fechamento assim constituida :

$$E_f = \sqrt{a^2_{\alpha}(l_1^2 + l_2^2 + \ldots l_n^2) + k^2 \frac{P}{c}} \qquad (16)$$

Tratando-se da verificação do êrro de fechamento resultante da aplicação do método das coordenadas, em que as latitudes e longitudes são calculadas por via de ângulos de direção, a fórmula (16) deve ser ligeiramente modificada, como adiante se verá.

Com o fim de adaptar os dados colhidos no campo (ângulos e distâncias) ao cálculo das coordenadas, convencionou-se um sistema de eixos ortogonais no qual o eixo das abcissas, considerado como linha de referência, é traçado em direção vertical, ficando-lhe à direita a parte positiva do eixo das ornedadas. Aquêle, orientado sempre para o Norte, pode ser meridiano verdadeiro, ou magnético, ou, ainda, uma linha arbitrária tomada como falso meridiano.

Assim considerando o nosso sistema de eixos, devemos entender por **ângulo de direção** de um segmento retilíneo AB, o ângulo que êste forma na sua origem com a parte positiva do eixo das abcissas, medido sempre a partir do dito eixo, em sentido dextrorso. Por extensão, aqui o designamos pelo nome de **Azimute**, ainda mesmo que a linha de referência não seja o meridiano verdadeiro nem o magnético. Nas demonstrações que se seguem não devemos confundí-lo com os **rumos** que são azimutes reduzidos aos quadrantes para maior facilidade dos cálculos.

Em um caminhamento efetuado com o trânsito ou teodolito, no qual os ângulos **T** são medidos em cada vértice, a amplitude do azimute βn de um alinhamento qualquer está na dependência do azimute $\beta n-1$ do alinhamento anterior e do ângulo interno $Tn-1$ compreendido entre os dois alinhamentos. O seu valor será expresso por qualquer das equações seguintes :

$$\beta n = \beta n - 1 + 180^{o} - Tn - 1 \qquad (17)$$

ou

$$\beta n = \beta_1 + (n-1)\ 180^{o} - (T_1 + T_2 + T_3 + \ldots Tn_{-1}) \qquad (18)$$

Resulta do exposto que, contràriamente ao que se dá com os ângulos internos, o êrro provável do azimute de uma linha qualquer é sempre maior que o da linha antecedente, sendo, na verdade, igual à soma dos êrros prováveis de todos os azimutes dos alinhamentos que o precedem inclusive o do alinhamento inicial, de que todos dependem.

Assim, chamando β' o êrro provável do azimute e t1, t2, t3 . . . **tn—1** os êrros permissíveis de cada um dos ângulos medidos, teremos :

$$\beta' n = \sqrt{\beta'^{2}_{1} + t^{2}_{1} + t^{2}_{2} + t^{2}_{3} + \ldots t^{2}_{n-1}} \qquad (19)$$

Os valores t1, t2, t3 . . . tn—1 são conhecidos e iguais, cada um, ao coeficiente de precisão **a** do instrumento empregado. O mesmo não se dá, porém, quanto ao êrro $\beta' 1$ do azimute da linha inicial, cujo valor não é fácil de se determinar. Para contornar a dificuldade é preciso elimná-lo — o que fàclmente se conseguirá tomando-se o primeiro alinhamento como falso meridiano. Assim procedendo, o azimute da linna inicial resultará igual a zero, tornando-se nulo também o êrro correspondente.

Daí a seguinte **equação** :

$$\beta' n = \sqrt{t^{2}_{1} + t^{2}_{2} + t^{2}_{3} + \ldots t^{2}_{n-1}} \qquad (20)$$

Uma vez que todos os **t** são iguais ao coeficiente **a**, vem

$$\beta'n = \sqrt{(n-1)\ a^2} \qquad (21)$$

Voltando à equação e nela suprimindo o primeiro alinhamente cujo êrro, na parte angular, é nulo, e conservando a mesma notação, temo-la assim modificada :

$$Ef = \sqrt{(\beta'^2_2\ l^2_2 + \beta'^2_3\ l^2_3 + \ldots \beta'^2_n\ \ l^2_n) + k^2\ \frac{P}{c}} \qquad (22)$$

Mas, da equação (21) tiram-se

$$\beta'_2 = \sqrt{a^2}\ ;\ \beta'_3 = \sqrt{2a^2}\ ;\ \ldots\ \beta'n = \sqrt{(n-1)a^2}$$

donde

$$Ef = \sqrt{(a^2\ l^2_2 + 2a^2\ l_3^2 + \ldots (n-)\ a^2\ l^2_n) + k^2\ \frac{P}{c}} \qquad (23)$$

ou

$$Ef = \sqrt{a^2\ (l^2_2 + 2l^2_3 + \ldots (n-1)\ l^2_n) + k^2 \frac{P}{c}} \qquad (24)$$

Estabelecidas e demonstradas que ficaram as fórmulas do êrro provável de fechamento, vamos esclarecer com um exemplo completo de aplicação, que poderá servir de paradígma aos que desejarem conferir os própros trabalhos no louvável intúito de se aproximarem, tanto quanto possível, da perfeição. A fórmula (23) é de fácil aplicação e pode ser utilizada em todos os casos que se apresentam mais frequentemente na prática, desde que se adaptem a cada caso os devidos coeficientes de precisão. Aquela é fixa; êstes, com a sua articulação apropriada, é que a tornam maleável. Todavia, não é única. Os que trabalham só com a bússola poderão, nos casos mais simples, não havendo atração local da agulha, empregar a fórmula (16). Então, devem ser muito mais largos e tolerantes os coeficientes de precisão, podendo o coeficiente angular ir de 5 a 8 minutos conforme a bússola. Concomitantemente o coeficiente linear será alterado, por exemplo, para 0,90 ou 0,1 conforme o caso, tudo a juizo do profissional, que procurará estabelecer uma certa concordância entre os coeficientes angular e linear.

Problema — Mediu-se um terreno de forma poligonal com um trânsito comum permitindo leitura angular até 30" de aproximação (a). As distâncias foram medidas com uma corrente de 20 ms. de comprimento, (c), perfeitamente aferida, tendo por coeficiente de precisão k = 0,40. Os ângulos internos (T) foram medidos em cada vértice e tomado o primeiro alinhamento (AB) como falso meridiano. Os rumos foram deduzidos dos respectivos azimutes, êstes obtidos por intermédio dos ângulos internos, de conformidade com a fórmula (17). Emprega-se, como se vê do quadro abaixo, o método das coordenadas retangulares. Deseja-se saber, pelo seu confronto com o êrro provável eq. 23), se o êrro de fechamento obtido pelo cálculo está dentro dos limites de tolerância.

CÁLCULO DAS COORDENADAS

Lados	Ângulos internos	Azimutes reduzidos	Distâncias l	Latitudes N	Latitudes S	Longitudes E	Longitudes W
AB		N 0°	295,40	295,40			
B	79°44'30"						
BC		79°44'30"SE	315,20		56,13	310,16	
—C	124°19'0"						
CD		24°3'30"SE	218,60		199,61	89,12	
D	107°40'0"						
DE		48°16'30"SW	244,50		162,73		182,49
Ê	108°42'0"						
EA		60°25'30"NW	249,00	122,89			216,55
Â	119°35'30"						
			1322,70	418,29	418,47	399,28	399,04
	Dif=60''		P	Dif=0,18		Dif=0,24	

Êrro atual de fechamento $= \sqrt{(0,18)^2 + (0,24)^2} = 0,30$

COMPROVAÇÃO DOS RESULTADOS

A) Quanto aos ângulos internos :

Êrro atual = 60'' Êrro provável — : $30''\sqrt{5} = 66''$ (eq. 1)

B) Quanto ao êrro de fechamento :

Êrro atual = $\sqrt{(0,18)^2 + (0,24)^2} = 0,30$

Êrro provável $= \sqrt{0,0131 + 0,1056} = 0,34$

Interpretação : Resultado mais que satisfatório.

VERIFICAÇÃO DOS CÁLCULOS

1. Erros angulares.

Dados—: $a = 30'' = 10^{-4} \times 1,455$ radianos

$a^2 = 10^{-8} \times 2,115$ radianos

Cálculos (eq. 23)

$a^2 l_2^2 = 10^{-8} \times 2,115 \times (315,20)^2 = 0,0021017$

$2a^2 l_3^2 = 10^{-8} \times 4,230 \times (218,60)^2 = 0,0020217$

$3a^2 l_4^2 = 10^{-8} \times 6,346 \times (244,50)^2 = 0,0037923$

$4a^2 l_5^2 = 10^{-8} \times 8,416 \times (249,00)^2 = 0,0052463$

Soma 0,0131630

$E_f = \sqrt{0,0131 + 0,1056} = 0,34$

2 Erros lineares :

Dados : $k = 0,04$

$k^2 = 0,0016$

$P = 1322$

$c = 20$

$P/c = 66$

Cálculo (eq. 15)

$k^2 \frac{P}{c} = 0,0016 \times 66 = 0,1056$

Conclusão — O processo que acabamos de estudar não é o mais comumente empregado na verificação do êrro de fechamento. É costume admitir-se **a priori** como expressão do limite do êrro permissível para tal ou qual levantamento, uma fração da distância medida, ou melhor, uma determinada **razão**, v. g., de um para mil. Semelhante critério, se bem que generalizado, não nos parece de todo defensável. Com efeito, êle se fundamenta na idéia de que, num dado perímetro, todo e qualquer alinhamento medido com igual precisão deve ter necessàriamente o seu limite de êrro enquadrado na mesma razão estabelecida — o que em verdade não acontece. Para comprová-lo basta atentarmos para a equação(5) na qual se verifica que a propagação do êrro linear se dá proporcionalmente, não à distância medida, mas à raiz quadrada dessa distância — ali expressa em correntes. Portanto, se o êrro fracional da distância total do perímetro não implica, como vimos, na mesma razão de êrro cada um dos alinhamentos considerados isoladamente, ainda que medidos em paridade de condições, segue-se que poderá êle interpretar, quando muito, a razão do êrro médio praticado e nunca a do limite máximo do êrro permissível. Aliás, esta objeção não é nossa. Encontramo-la em primeira mão no belo livro de Henry Briggs, intitulado "The Effects of Errors in Surveyig". (*)

No método por nós estudado, o adensamento do êrro provável é acompanhado passo a passo, estação por estação, até concretizar-se no êrro provável de fechamento. Êste, aplicado como um teste ao resultado atual, facilita, por comparação, o julgamento do serviço e acusa imediatamente a existência de qualquer engano ou êrro sistemático fora do comum.

Qualquer que seja, porém, o processo empregado — atente bem o leitor — nenhum dêles exprime certeza ou exatidão matemática, porque — se esta exclui a possibilidade de êrros — aquela, por sua própria natureza, não condiz com a noção de probabilidade, na qual se baseiam tôdas as questões relativas à teoria dos êrros.

São Paulo, agosto de 1946.

(*) H. Briggs. op. cit., Londres, 1912.